Декомпозиція операторних рівнянь на основі агрегаційно-ітеративного підходу

Валерій Гавриленко[1], *Анатолій Обшта*[2], *Богдан Шувар*[2]

[1]Національний транспортний університет
вул. Омеляновича-Павленка 1, Київ, Україна, 01010
vvgavrilenko1953@gmail.com, orcid.org/0000-0001-9682-4204
[2]Національний університет «Львівська політехніка»
вул. Степана Бандери 12, Львів, Україна, 79000
vm.imfn@gmail.com, orcid.org/0000-0002-0000-0000

Отримано 16.02.2018, прийнято після перегляду 03.07.2018
DOI: 10.31493/tit1812.0303

Анотація. Побудовано і досліджено агрегаційно-ітеративний алгоритм для нелінійних операторних рівнянь, що охоплює методи ітеративного агрегування для однопараметричного і багатопараметричного випадків та містить як часткові випадки алгоритмів, так і алгоритм, що використовується для дослідження стійкості рішень диференціальних рівнянь в банаховому просторі.

Отримано достатні умови збіжності методів ітеративного агрегування і їх узагальнень, які, на відміну від відомих результатів не містять обмежень щодо знакосталості і монотонності відповідних операторів, а також, не потребують, щоб ці оператори були стискуючими.

Результати досліджень можуть, наприклад, мати застосування при розв'язанні системи лінійних алгебраїчних рівнянь високої розмірності, які описують планові задачі в математичній економіці, та при розв'язанні лінійних інтегральних рівнянь і їх систем та при розв'язанні систем алгебраїчних трансцендентних рівнянь високої розмірності і нелінійних інтегральних рівнянь.

Ключові слова: операторні рівняння, декомпозиція, ітеративне агрегування.

Валерій Гавриленко
завідувач кафедри інформаційних систем і технологій
д.ф.-м.н., проф.

Анатолій Обшта
професор кафедри обчислювальної математики і програмування
д.т.н., проф.

ВСТУП

Як зазначено в [1, стор. 54] «в прикладній математиці є немало числових методів, особливо тих, що стосуються складних завдань, які не отримали строгого обґрунтування, хоча успішно застосовуються на практиці». Такими є, зокрема, методи ітеративного агрегування, котрі «вивчені мало і умови їхньої збіжності невідомі» [2, стор. 158]. Поміж численних досліджень цих методів одним з найвагоміших є монографія [3]. Методи ітеративного агрегування формально споріднені з проекційно-ітеративними методами [4 – 7]. Істотна відмінність між ними ґрунтується на фактах, що встановлені, наприклад в [6, 7].

Доцільними є також побудова і дослідження «синтезованих» алгоритмів, які поєднують ідеї тих чи інших наближених методів з ідеєю методів ітеративного агрегування (див., наприклад [7, розділ XIII]). Таким способом отримані нові ітераційні методи, яким властиві переваги кожного із вихідних методів і цим розширюються можливості їх використання в прикладних задачах (див., наприклад [4, Вступ]). Цими фактами, а також пристосованістю до розпаралелення обчислень задля реалізації на багатопроцесорних обчислювальних системах та придатністю до побудови таких варіантів багатопараметричного ітеративного агрегування, за допомогою яких можна отримати способи усунути труднощі, спричинені практичною жорсткістю обчислюваних задач, актуалізується доцільність дослідження методів інтерактивного агрегування.

В статті запропоновано і досліджено деякі алгоритми, які охоплюють як однопараметричні, так і багатопараметричні методи ітеративного агрегування для рівнянь з лінійними і нелінійними операторами. Застосуємо започатковану в [6] і експлуатовану в низці досліджень інших авторів методологію, яка не використовує припущення щодо знакосталості і монотонності відповідних операторів і не потребує, щоб ці оператори були стискувальними (див. також [7, розд. XIII]).

ПОБУДОВА АЛГОРИТМУ

Розглядається рівняння

$$x = Ax + b \ (b \in E) \tag{1}$$

в банаховому просторі E з лінійним неперервним оператором $A: E \to E$. Побудуємо агрегаційно-ітеративний аналог для проекційно-ітеративного методу, який описується формулою.

$$x^{(n+1)} = APx^{(n+1)} + AQx^{(n)} + b \ ,$$

де $P\left(P^2 = P\right)$ − заданий оператор, що проектує елементи простору E в елементи деякого його підпростору, причому $Q = I - P$, де I − тотожний оператор. Вважатимемо заданим лінійний неперервний оператор $S: E \to E'$ та лінійний неперервний оператор $\Lambda: E' \to E'$, де E' − банахів простір, який, взагалі кажучи, не тотожний з простором E. На практиці простір E' здебільшого є евклідовим простором R^N. Будемо вважати, що справджується рівність.

$$S\left(A + \tilde{A}\right)P + \Lambda S \ . \tag{2}$$

Можна вважати, що цією рівністю означено лінійний неперервний оператор $\tilde{A}: E \to E$. Якщо йдеться про однопараметричний випадок, то замість (2) матимемо

$$\left(\varphi, \left(A + \tilde{A}\right)x\right) = \lambda(\varphi, x), \tag{3}$$

де (φ, x) − значення лінійного функціоналу $\varphi \in E^*$ на елементах $x \in E$ (E^* − спряжений з E − банахів простір). Якщо $\tilde{A}$ є нульовим оператором, то число λ і елемент φ є власним числом і відповідним йому власним елементом спряженого з A оператора A^*. В загальнішому вигляді рівність

$$SAP = \Lambda S, \tag{4}$$

яка отримується з (2), якщо $\tilde{A}$ є нульовим оператором, можна трактувати, як узагальнення спектральної задачі для оператора AP. Якщо при цьому Λ є матрицею діагонального вигляду, то її елементи є власними числами оператора AP.

Розглянемо систему, яку складено з рівняння (1) та допоміжного рівняння

$$y = \Lambda y - SAQx - Sb + SAPx \tag{5}$$

з додатковим невідомим $y \in E'$. Вважатимемо, що існує обернений оператор $(I' - \Lambda)^{-1}$, де I' − одиничний оператор в E'. Множину пар $\{x, y\}$ елементів $x \in E$, $y \in E'$, які задовольняють

$$Sx + y = \theta', \tag{6}$$

де θ' − нульовий елемент в E' позначимо через ε_0. Ця множина є підпростором в банаховому просторі $E_0 = E \times E'$ з нормою запровадженою за допомогою формули

$$\|x, y\|_0 = \sqrt{\|x\|_E^2 + \|y\|_{E'}^2} \, . \qquad (7)$$

Використовуючи цей спосіб занурення простору E в простір E_0 побудуємо ітераційний процес за допомогою формул

$$x^{(n+1)} = APx^{(n+1)} + AQx^{(n)} + a^{(n)}\left(y^{(n)} - y^{(n-1)}\right) + b \ ; \qquad (8)$$

$$y^{(n+1)} = \Lambda y^{(n+1)} - SAQx^{(n)} + \\ + \alpha_0^{(n)}\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) - Sb. \qquad (9)$$

Тут $a^{(n)} : E' \to E$, $\alpha_0^{(n)} : E' \to E'$ є заданими операторами при кожному $n = 0, 1, \ldots$. Для кожного $n = 0, 1, \ldots$ постулюємо виконання умови

$$Sa^{(n)} + \alpha_0^{(n)} = \Lambda \, . \qquad (10)$$

Вибір операторів, що фігурують в (10), конкретизує ітеративний алгоритм, який описують формули (8), (9), за умови, що $x^{(0)}$, $y^{(0)}$ задовольняють рівність (6) при $x = x^{(0)}$, $y = y^{(0)}$. У випадку, коли йдеться про однопараметричний метод ітеративного агрегування і справджується рівність (3), ітеративний процес (8), (9) можна подати у вигляді

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n+1)} \frac{APx^{(n+1)}}{\left(\varphi, x^{(n)}\right)}\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) + b \ , \qquad (11)$$

$$y^{(n+1)} = \lambda y^{(n+1)} - \left(\varphi, \tilde{A}Qx^{(n)}\right) + \\ + \frac{\left(\varphi, AQx^{(n)}\right)}{\left(\varphi, x^{(n)}\right)}\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) - \left(\varphi, b^{(0)}\right) + S\tilde{A}Px^{(n)} . \qquad (12)$$

Рівність (6) у цьому випадку має вигляд

$$(\varphi, x) + y = 0 \, . \qquad (13)$$

З цієї рівності при $x = x^{(0)}$ знаходимо $y^{(0)} = y$. Зауважимо, що $x^{(0)}$ можна вибирати довільним способом. При цьому справджується рівність

$$\left(\varphi, a^{(n)}\right) + \alpha_0^{(n)} = \lambda \, , \qquad (14)$$

при $n = 0$ завдяки вибору $a^{(n)}$, $\alpha_0^{(n)}$ за формулами

$$x^{(n+1)} = \frac{\left(\varphi, Ax^{(n+1)}\right)}{\left(\varphi, x^{(n)}\right)} ; \ \alpha_0^{(n)} = \frac{\left(\varphi, AQx^{(n)}\right)}{\left(\varphi, x^{(n)}\right)} . \qquad (15)$$

Очевидно, що однопараметричний алгоритм (11), (12) можна подати у вигляді

$$x^{(n+1)} = \frac{\left(\varphi, Ax^{(n+1)}\right)}{\left(\varphi, x^{(n)}\right)} APx^{(n)} + AQx^{(n)} + b \, . \qquad (16)$$

РЕЗУЛЬТАТИ ТА ПОЯСНЕННЯ

Дослідження збіжності алгоритму (8), (9) ґрунтується на таких доведених авторами фактах.

Лема 1. *Якщо існує обернений оператор* $(I' - \Lambda)^{-1}$ *і* $\left\{x^*, y^*\right\}$ *з розв'язком системи* (1), (5), *то* $\left\{x^*, y^*\right\} \in \varepsilon_0$.

Лема 2. *Якщо* $\left\{x^{(0)}, y^{(0)}\right\} \in \varepsilon_0$ *і справджуються рівності* (10), *то* $\left\{x^{(n)}, y^{(n)}\right\} \in \varepsilon_0$.

Наслідком цих двох тверджень є такий факт. При $\left\{x^{(0)}, y^{(0)}\right\} \in \varepsilon_0$ за припущення, що існує оператор $(I' - \Lambda)^{-1}$ виконуються рівності

$$S\left(x^{(n)} - x^*\right) + \left(y^{(n)} - y^*\right) = 0 \ \left(n = 0, 1, \ldots\right) . \qquad (17)$$

Умови збіжності. Задля спрощення міркувань вважатимемо $\tilde{A}$ нульовим оператором, припускаючи, що цього можна досягнути, вибравши відповідним чином оператор P. Очевидними є співвідношення

$$y^{(n+1)}-y^{*}=-\left(I'-\Lambda+a_0^{(n)}\right)^{-1}SAQ\left(x^{(n)}-x^{*}\right)+$$
$$+\left(I'-\Lambda+a_0^{(n)}\right)^{-1}a_0^{(n)}\left(y^{(n)}-y^{(n+1)}\right),$$

$$x^{(n+1)}-x^{*}=\left(A+a^{(n)}\left(I'-\Lambda+a_0^{(n)}\right)^{-1}SAQ\left(x^{(n)}-x^{*}\right)\right)+$$
$$+a^{(n)}\left(I'-\Lambda+a_0^{(n)}\right)^{-1}\left(I'-\Lambda\right)\left(y^{(n)}-y^{*}\right),$$

які випливають з (1), (5), (8), (9) та з припущення про існування оператора

$$\left(I'-\Lambda+a_0^{(n)}\right)^{-1} \text{ при } n=0,\ 1,\ldots$$

Звідси, використовуючи співвідношення (17), отримуємо

$$y^{(n+1)}-y^{*}=-\left(I'-\Lambda+a_0^{(n)}\right)^{-1}\left(SAQ\ -\psi_0^{(n)}S\right)\left(x^{(n)}-x^{*}\right)+$$
$$+\left(I'-\Lambda+a_0^{(n)}\right)^{-1}\left(a_0^{(n)}-\psi_0^{(n)}\right)\left(y^{(n)}-y^{(n+1)}\right), \qquad (18))$$

$$x^{(n+1)}+x^{*}=\left(A-a^{(n)}\left(I'-\Lambda+a_0^{(n)}\right)^{-1}\left(SAQ\ -\psi^{(n)}S\right)\left(x^{(n)}-x^{*}\right)\right)+$$
$$+\left(a^{(n)}\left(I'-\Lambda+a_0^{(n)}\right)^{-1}\left(I'-\Lambda+\psi^{(n)}\right)\left(y^{(n)}-y^{*}\right)\right) \qquad (19)$$

із, в цілому, довільно вибраними лінійними неперервними операторами

$$\psi^{(n)}:E'\rightarrow E,\ \psi_0^{(n)}:E'\rightarrow E.$$

Позначимо

$$h_{11}^{(n)}=A+a^{(n)}\left(I'-\Lambda+a_0^{(n)}\right)^{-1}\left(SAQ-\psi^{(n)}S\right),$$
$$h_{12}^{(n)}=a^{(n)}\left(I'-\Lambda+a_0^{(n)}\right)^{-1}\left(I'-\Lambda+\psi^{(n)}\right),$$
$$h_{21}^{(n)}=-\left(I'-\Lambda+a_0^{(n)}\right)^{-1}\left(SAQ-\psi_0^{(n)}S\right),$$
$$h_{22}^{(n)}=-\left(I'-\Lambda+a_0^{(n)}\right)^{-1}\left(a_0^{(n)}-\psi_0^{(n)}\right).$$

Приймемо позначення $\left\|H^{(n)}\right\|_0$ для норми

оператора $H^{(n)}=\begin{pmatrix} h_{11}^{(n)} & h_{12}^{(n)} \\ h_{21}^{(n)} & h_{22}^{(n)} \end{pmatrix}$.

Встановлено та доведено наступні твердження.

Теорема 1.

Якщо справджується умова

$$\left\|H^{(n)}\right\|_0^{(n)}\leq q_0<1 \quad \left(n+0,1,\ldots\right), \qquad (20)$$

причому $\left\{x^{(0)},y^{(0)}\right\}\in\varepsilon_0$, *то ітераційний процес* (8), (9) *зводиться до розв'язку системи* (1), (5) *не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником* q.

Теорема 2.

Якщо $\left\{x^{(0)},y^{(0)}\right\}\in\varepsilon_0$ *і справджується співвідношення*

$$\left\|A-a^{(n)}\left(I'-\Lambda+a_0^{(n)}\right)^{-1}S\left(I-A\right)\right\|_E\leq q_0<1 \quad \left(n+0,\ 1,\ldots\right), \qquad (21)$$

де $\left\|\bullet\right\|_E$ *норма оператора в* E, *то послідовність* $\left\{x^{(n)}\right\}$, *отримана за допомогою алгоритму* (8), (9) *зводиться до розв'язку* $x^{*}\in E$ *рівняння* (1) *не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником* q_0.

Побудова алгоритму для нелінійних рівнянь

Розглядатимемо рівняння вигляду

$$x=Fx \qquad (22)$$

з нелінійним оператором $F:D\rightarrow E$. Задля спрощення вигляду будемо вважати, що в ролі D маємо простір E. Вважаємо, що оператор F має похідну Фреше $F'(x)w$, яка є лінійним неперервним оператором щодо w і неперервним оператором щодо x. Приймемо позначення $A_n=F'\left(x^{(n)}\right)$ та A_n^{*} для спряженого до A_n оператора. Позначатимемо через E^{*} спряжений до E банахів простір. Позначення S, Λ, E, E', θ' є тими самими, що й дотепер.

Припустимо, що справджується рівність

$$S\left(A_n+\tilde{A}_n\right)=\Lambda S, \qquad (23)$$

вважаючи заданим лінійний неперервний щодо w та неперервний щодо x оператор $\tilde{A}_n w = \tilde{A}\left(x^{(n)}\right)w$, підпорядкований тільки умові (23).

Аналогом рівняння (5) є рівняння

$$y = \Lambda y + \Lambda S x - SFx. \qquad (24)$$

Множину ε_0 визначаємо за рівністю (6). Задамо лінійні нелінійні оператори

$$a^{(n)} : E' \to E\,;\ \alpha_0^{(n)} : E' \to E',$$

підпорядкувавши їх умові (10) і маючи на увазі те, що вони в цілому залежать від величини $x^{(n)}$, яка фігурує в ітераційних формулах

$$x^{(n+1)} = Fx^{(n)} + a^{(n)}\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right), \qquad (25)$$

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} &= \Lambda y^{(n+1)} + \Lambda S x^{(n)} - SFx^{(n)} + \\ &+ \alpha_0^{(n)}\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) \end{aligned}. \qquad (26)$$

Зберігаються твердження лем 1 і 2 в умовах, які постулюємо відповідно до існування оператора $(I' - \Lambda)^{-1}$, і вибір $\left\{x^{(0)}, y^{(0)}\right\}$ з множини ε_0. Це дає підставу стверджувати виконання рівностей

$$S\left(x^{(n)} - x^*\right) + \left(y^{(n)} - y^*\right) = \theta' \ \ (n = 0,1,\ldots), \qquad (27)$$

якщо $\left\{x^{(0)}, y^{(0)}\right\} \in \varepsilon_0$.

Збіжність алгоритмів (25), (26)

З рівностей (22), (24) та (25), (26) випливає

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} - y^* &= \left(I' - \Lambda + a_0^{(n)}\right)^{-1} \Lambda S\left(x^{(n)} - x^*\right) - \\ &- \left(I' - \Lambda + a_0^{(n)}\right)^{-1} S\left(Fx^{(n)} - Fx^*\right) + \\ &+ \left(I' - \Lambda + a_0^{(n)}\right) a_0^{(n)}\left(y^{(n)} - y^*\right) \end{aligned} \qquad (28)$$

та

$$\begin{aligned} x^{(n+1)} - x^* &= a^{(n)}\left(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)}\right)^{-1}\left(I' - \Lambda\right)\left(y^{(n)} - y^*\right) + \\ &+ Fx^{(n)} - Fx^* + \\ &+ a^{(n)}\left(I' - \Lambda + a_0^{(n)}\right)^{-1} S\left(Fx^{(n)} - Fx^*\right) - \\ &- a^{(n)}\left(I' - \Lambda + a_0^{(n)}\right)^{-1} \Lambda S\left(x^{(n)} - x^*\right) \end{aligned} \qquad (29)$$

Визначимо лінійний неперервний щодо w та неперервний щодо x оператор $Q_n w$ за допомогою формули (див. [8, стор. 82])

$$Q_n w = \int_0^1 F'\left(x^{(n)} + \tau\left(x^* - x^{(n)}\right)\right) w\, d\tau, \qquad (30)$$

де $F'(z)$ є похідною Фреше від оператора F в точці z. Задамо лінійні неперервні оператори

$$\Psi^{(n)} : E' \to E\,;\ \ \Psi_0^{(n)} : E' \to E'$$

і запишемо рівності

$$\Psi^{(n)} S\left(x^{(n)} - x^*\right) + \Psi^{(n)}\left(y^{(n)} - y^*\right) = \theta, \qquad (31)$$

$$\Psi_0^{(n)} S\left(x^{(n)} - x^*\right) + \Psi_0^{(n)}\left(y^{(n)} - y^*\right) = \theta'. \qquad (32)$$

Рівності (28), (29) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} - y^* &= \left(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)}\right)^{-1}\left(\Lambda S - SQ_n\right)\left(x^{(n)} - x^*\right) + \\ &+ \left(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)}\right)^{-1} \alpha_0^{(n)}\left(y^{(n)} - y^*\right), \\ x^{(n+1)} - x^* &= \left(Q_n - a^{(n)}\left(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)}\right)^{-1}\left(\Lambda S - SQ_n\right)\right)\left(x^{(n)} - x^*\right) + \\ &+ a^{(n)}\left(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)}\right)^{-1}\left(I' - \Lambda\right)\left(y^{(n)} - y^*\right). \end{aligned}$$

Тоді з рівнянь (31) і (32), отримуємо

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} - y^* &= \left(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)}\right)^{-1}\left(\Lambda S - SQ_n - \Psi_0^{(n)} S\right)\left(x^{(n)} - x^*\right) + \\ &+ \left(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)}\right)^{-1}\left(\alpha_0^{(n)} - \Psi_0^{(n)}\right)\left(y^{(n)} - y^*\right), \end{aligned} \qquad (33)$$

$$\begin{aligned} x^{(n+1)} - x^* &= \left(Q_n - a^{(n)}\left(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)}\right)^{-1}\left(\Lambda S - SQ_n - \Psi_0^{(n)} S\right)\right)\left(x^{(n)} - x^*\right) + \\ &+ a^{(n)}\left(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)}\right)^{-1}\left(I' - \Lambda - \Psi^{(n)}\right)\left(y^{(n)} - y^*\right). \end{aligned} \qquad (34)$$

Вважаючи заданим оператор $\widetilde{A}_n = \widetilde{A}\left(x^{(n)}\right)$, який фігурує в рівності (23), позначимо

$$G_n w = \int_0^1 \widetilde{A}\left(x^{(n)} + \tau_1\left(x^* - x^{(n)}\right)\right) w d\tau_1 \quad (35)$$

Рівності (33), (34) можна подати у вигляді

$$y^{(n+1)} - y^* = \left(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)}\right)^{-1}\left(SG_n - \Psi_0^{(n)} S\right)\left(x^{(n)} - x^*\right) + \\ + \left(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)}\right)^{-1}\left(\alpha_0^{(n)} - \Psi_0^{(n)}\right)\left(y^{(n)} - y^*\right), \quad (36)$$

$$x^{(n+1)} - x^* = \left(Q_n - a^{(n)}\left(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)}\right)^{-1}\left(SG_n - \Psi_0^{(n)} S\right)\right)\left(x^{(n)} - x^*\right) + \\ + a^{(n)}\left(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)}\right)^{-1}\left(I' - \Lambda - \Psi^{(n)}\right)\left(y^{(n)} - y^*\right). \quad (37)$$

Позначимо

$$H^{(n)} = \begin{pmatrix} \widetilde{H}_{11}^{(n)} & \widetilde{H}_{12}^{(n)} \\ \widetilde{H}_{21}^{(n)} & \widetilde{H}_{22}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad (38)$$

де

$$\widetilde{H}_{11}^{(n)} = Q^{(n)} - a^{(n)}\left(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)}\right)^{-1}\left(SG - \psi^{(n)} S\right);$$
$$\widetilde{H}_{12}^{(n)} = a^{(n)}\left(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)}\right)^{-1}\left(I' - \Lambda + \psi^{(n)}\right);$$
$$\widetilde{H}_{21}^{(n)} = \left(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)}\right)^{-1}\left(SG - \psi_0^{(n)} S\right);$$
$$\widetilde{H}_{22}^{(n)} = \left(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)}\right)^{-1}\left(\alpha_0^{(n)} - \psi_0^{(n)}\right).$$

Співвідношення (37), (37) дають підставу для такого підсумку.

Теорема 3.
Якщо $\left\{x^{(0)}, y^{(0)}\right\} \in \varepsilon_0$ *і має місце умова*

$$\left\| \widetilde{H}^{(n)} \right\|_0^{(n)} \le q < 1 \quad (n = 0, 1, \ldots), \quad (39)$$

то послідовність $\left\{x^{(n)}, y^{(n)}\right\}$ *зводиться до розв'язання* $\left\{x^*, y^*\right\}$ *системи* (22), (24) *не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником* q. *При цьому*

$$\left\{x^{(n)}, y^{(n)}\right\} \in \varepsilon_0 \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Зазначимо, що вибір операторів $\Psi^{(n)}$ і $\Psi_0^{(n)}$ підпорядковано тільки вимозі (36).

Зауваження. Умова $q < 1$ в наведених теоремах може справджуватися як у випадках, якщо відповідний оператор є стиском, і якщо вимога стиску не справджується. Зокрема у лінійному випадку спектральний радіус оператора може бути більшим від одиниці. В такому випадку похибки заокруглень можуть на практиці призвести до розбіжності ітерацій.

Засобом для усунення обчислювальних утруднень в такому разі може бути множина ε_0, якій належить вирішальна роль у перетворенні теоретично збіжного ітераційного процесу в практично збіжний.

ВИСНОВКИ

1. Побудовано і досліджено агрегаційно-ітеративний алгоритм для нелінійних операторних рівнянь, що охоплює методи ітеративного агрегування для одно параметричного і багато параметричного випадків і містить як часткові випадки алгоритми із [3], також алгоритм, досліджений в [9].
2. Отримано достатні умови збіжності методів ітеративного агрегування і їх узагальнень, які, на відміну від відомих результатів не містять обмежень щодо знакосталості і монотонності відповідних операторів, а також, не потребують, щоб ці оператори були стискуючими.
3. Результати досліджень можуть, наприклад, мати застосування при розв'язанні системи лінійних алгебраїчних рівнянь високої розмірності, які описують планові задачі в математичній економіці, та при розв'язанні лінійних інтегральних рівнянь і їх систем та при розв'язанні систем алгебраїчних трансцендентних рівнянь високої розмірності і нелінійних інтегральних рівнянь.

ЛІТЕРАТУРА

1. **Тихонов А.Н., Костомаров Д.П., 1984.** Вводные лекции по прикладной математике. Москва, Наука, 192.
2. **Красносельський М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В., 1985.** Позитивные линейные системы, Москва, Наука, 255.
3. **Гробова Т.А., Стеценко В.Я., 2003.** Методы итеративного агрегирования для приближенного решения линейных и нелинейных алгебраических систем и интегральных уравнений: монография. Ставрополь, Изд-во СГУ, 87.
4. **Курпель Н.С., 1968.** Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. Киев, Наук. думка, 243.
5. **Лучка А.Ю., 1980.** Проекционно-итеративные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Киев, Наук, думка, 264.
6. **Шувар Б.А., 1989.** О сходимости многопараметрических методов итеративного агрегирования. Вестник Львов. политехн. ин-та. Прикладная математика, Вып.232, 140-142.
7. **Шувар Б.А., Копач М.І., Ментинський С.М., Обшта А.Ф., 2007.** Двосторонні наближені методи. Івано-Франківськ, Вид-во Прикарпатського націон. ун-ту імені В. Стефаника, 515.
8. **Далецкий Ю.А., Крейн М.Г., 1970.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Москва, Наука, 534.
9. **Копач М.Л., Обшта А.Ф., Шувар Б.А., 2011.** Ітеративне агрегування для нелінійних операторних рівнянь. Математичний вісник НТШ, Т.8, 100-105.

REFERENCES

1. **Tihonov A.N., Kostomarov D.P., 1984.** Vvodnie lekcii po prikladnoi matematike. Moscow, Nauka, 192 (in Russian).
2. **Krasnosel'skii M.A., Lifshic E.A., Sobolev A.V., 1985.** Positivnie lineynie sistemi. Moscow, Nauka, 255 (in Russian).
3. **Grobova T.A., Stecenko V.Y., 2003.** Metodi iterativnogo agregirovaniya dlya pribligennogo resheniya leneynih i nelineynih algebraicheskih system i integral'nih uravneniy. Stavropol, SGU, 87 (in Russian).
4. **Kurpel' N.S., 1968.** Proekcionno-iterativnie metodi resheniya operatornih uravneniy. Kyiv, Naukova Dumka, 243 (in Russian).
5. **Luchka A.Y., 1980.** Proekcionno-iterativnie metodi resheniya obiknovennih differencial'nih uravneniy. Kyiv, Naukova Dumka, 264 (in Russian).
6. **Shuvar B.A., 1989.** O shodimosti mnogoparametricheskih metodov iterativnogo agregirovaniya. Bulletin of Lviv. Polytechnic. Inst., Applied Mathematics, 140-142 (in Russian).
7. **Shuvar B.A., Kopach M.L., Mentins'kii S.M., Obshta A.F., 2007.** Dvostoronni nablingeni metodi. Ivano-Frankivsk, Carpathian National University of V. Stefanik, 515 (in Ukrainian).
8. **Daleckii Yu.A., Kreyn M.G., 1970.** Ustoychivost' reshenii differencial'nih uravnenii v banahovom prostranstve. Moskva, Nauka, 534 (in Russian).
9. **Kopach M.L., Obshta A.F., Shuvar B.A. 2011.** Iterativne agreguvannya dlya nelinijnih operatornih rivnyan'. Mathematical Bulletin of NTSH, Vol.8, 100-105 (in Ukrainian).

Decomposition of operator equations based on aggregation-iterative approach

Valery Gavrilenko, Anatoliy Obshta,
Bogdan Shuwar

Abstract. An aggregation-iterative algorithm for nonlinear operator equations covering andterative-aggregation methods for one-parameter and multiparameter cases is constructed and investigated and contains both partial cases of algorithms and an algorithm used to study the stability of solutions of differential equations in a Banach space.

Sufficient conditions for the convergence of iterative aggregation methods and their generalizations are obtained, which, in contrast to the known results, do not contain restrictions on the signs of fidelity and monotony of the respective operators, nor do they require that these operators be compressible.

The results of the research can, for example, be used in solving a system of linear algebraic equations of high dimensionality that describe the scheduled problems in mathematical economics, and when solving linear integral equations and their systems, and solving sin systems of algebraic transcendental equations of high dimension and nonlinear integral equations.

Keywords: operator equations, decomposition, iterative aggregation.